Studijní materiály k Astronomické olympiádě

Autoři: Tomáš Franc, Václav Pavlík

Datum: 19. dubna 2017

Úvod

Kolektiv autorů Astronomické olympiády připravil doplňující materály k tématům probíraným v úlohách. Tento studijní text je určen řešitelům ve všech kategoriích i zájemcům mimo řady astronomů. V žádném případě se jím nesnažíme nahradit běžnou výuku ani práci kantorů. Naším cílem je pouze ucelit potřebné znalosti řešitelů a vyzvednout věci, které jsou k úspěšnému řešení úloh třeba.

Platné číslice

Ze zkušenosti víme, že každé měření fyzikálních veličin, které uděláme, bude mít nějakou chybu. A to i v případě, že přesně dodržíme předepsaný postup. Tato chyba však neznamená, že jsme měření provedli nesprávným způsobem, ale že naše měřící přístroje mají jen omezené možnosti. Budeme-li například měřit vzdálenost mezi stromy v aleji pomocí násady od koštěte, o které víme, že je dlouhá asi jeden metr, budeme mít daleko méně přesné výsledky než náš kolega, který použije svinovací metr, na kterém má centimetrové značky. Při zapisování výsledků si musíme uvědomit, že naše přesnost měření je v násobcích násad, tj. v řádech metrů, kdežto u našeho kolegy je v řádech centimetrů.
K vyjádření (ne)přesnosti měření a hlavně k přenosu této (ne)přesnosti během výpočtů slouží ve fyzice tzv. *platné číslice*. Budeme-li dodržovat platné číslice, nemůže se nikdy stát, že výsledek bude o několik řádů přesnější než hodnoty, které jsme dosadili na začátku výpočtu.

Definice

Platné číslice daného čísla jsou všechny číslice, které následují vpravo za první nenulovou číslicí.

Příklad 1

Počty platných číslic jsou uvedeny pod čísly.

$$\underbrace{2016}_{4} \qquad \underbrace{735\,012}_{6} \qquad \underbrace{1{,}602}_{4} \qquad \overbrace{0{,}000}^{\text{nepočítají se}}\underbrace{14}_{2} \qquad \overbrace{0{,}000}^{\text{nepočítají se}}\underbrace{700}_{3}$$

Dva matematicky evkivalentní zápisy stejného čísla neznamenají ve fyzice stejný počet platných číslic.

$$\underbrace{10\,000}_{5} \qquad \underbrace{1{,}000\,0}_{5}\underbrace{\times 10^4}_{\text{nepočítá se}} \qquad \underbrace{1{,}000}_{4}\underbrace{\times 10^4}_{\text{nepočítá se}} \qquad \underbrace{1{,}00}_{3}\underbrace{\times 10^4}_{\text{nepočítá se}} \qquad \underbrace{1{,}0}_{2}\underbrace{\times 10^4}_{\text{nepočítá se}} \qquad \underbrace{1}_{1}\underbrace{\times 10^4}_{\text{nepočítá se}}$$

Převodem jednotek se počet platných číslic nemění.

$$d = \underbrace{7\,035}_{4}\ \text{cm} = \underbrace{70{,}35}_{4}\ \text{m} = 0{,}0\underbrace{70\,35}_{4}\ \text{km}$$

Z tohoto čísla ale nelze převodem udělat 70 350 mm, protože bychom dostali o 1 platnou číslici víc. Pokud chceme d zapsat v milimetrech, musíme použít exponenciální tvar, který počet platných číslic nezvýší, tedy

$$d = \underbrace{7{,}035}_{4} \times 10^4\,\mathrm{mm}\,.$$

Výpočty

Výsledek musí být zaokrouhlen na právě tolik platných číslic, kolik je nejmenší počet platných číslic u zadaných veličin.
Proč? Chceme-li dostat fyzikálně správný výsledek, musíme dbát na to, aby neměl větší přesnost (tj. více platných číslic), než jakou mají zadané veličiny. Zároveň by také neměl mít přesnost příliš malou (tj. moc málo platných číslic), protože by pak mohl být nepoužitelný. Pozor musíme dát jen na *přesná čísla (např. konstanty a zlomky)*, která se občas ve vzorcích vyskytují, které *počet platných číslic neovlivňují*! Tyto poučky můžeme ilustrovat na jednoduchém příkladu.

Příklad 2

Těleso o hmotnosti 1,00 tun dopadlo na Zemi rychlostí 11 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Jakou mělo při dopadu hybnost a jakou kinetickou energii?

$m = 1{,}00\,\mathrm{tun} = 1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg}$

(Pozor, ne 1 000 kg, protože nesmíme přidávat platné číslice.)

$v = 11\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 1{,}1 \times 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(Také převedeme na základní jednotky, ale zachováme platné číslice, takže ne 11 000 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.)

hybnost:

$$p = mv = \underbrace{1{,}00}_{3} \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \underbrace{1{,}1}_{2} \times 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underbrace{1{,}1}_{2} \times 10^7\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

kinetická energie:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{přesné číslo}\\ \text{platné číslice}\\ \text{neovlivňuje}}} \cdot \underbrace{1{,}00}_{3} \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \left(\underbrace{1{,}1}_{2} \times 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = \overbrace{\frac{1}{2} \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}21 \times 10^{11}\,\mathrm{J}}^{\substack{\text{uprostřed výpočtu}\\ \text{číslice neřešíme,}\\ \text{až u výsledku}}} =$$

$$= 0{,}\underbrace{605}_{\substack{\text{3, to je moc číslic}\\ \text{musíme zaokrouhlit}\\ \text{na nejmenší počet,}\\ \text{tj. na 2}}} \times 10^{11}\,\mathrm{J} \approx 0{,}\underbrace{61}_{2} \times 10^{11}\,\mathrm{J} = \underbrace{6{,}1}_{2} \times 10^{10}\,\mathrm{J} = \underbrace{61}_{2}\,\mathrm{GJ}$$

Práce s velkými čísly

V astronomii často pracujeme s velkými čísly, ať už jde o vyjádření vzdáleností, velikostí, hmotností atd. Tak například střední vzdálenost mezi Zemí a Sluncem je přibližně sto padesát miliard metrů, tedy 150 000 000 000 m. Hmotnost Země je vyjádřena ještě delším zápisem:

$$5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{kg}$$

Takto velká čísla je výhodné zapisovat v takzvaném *vědeckém formátu čísla*, což je tvar využívající zápisy pomocí mocnin se základem deset:

$$a \cdot 10^b$$

kde a je číslo větší nebo rovno jedné a menší než deset (často se jedná o desetinné číslo se dvěma desetinnými místy) a b je celé číslo. Matematicky vyjádřeno

$$1 \leq a < 10$$

Co je mocnina? Na to odpovíme po dvou příkladech. Výše uvedené hodnoty krátce zapíšeme ve vědeckém formátu takto:

$$150\,000\,000\,000\,\mathrm{m} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

$$5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{kg} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

Mocninný zápis

Když sčítáme několik stejných čísel, je výhodné zápis sčítání nahradit – zkrátit pomocí násobení:

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4\text{krát}} = 3 \cdot 4$$

Úplně stejně je výhodné nahradit násobení několika stejných čísel pomocí mocniny:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\text{krát}} = 3^4$$

Celý výraz 3^4 nazýváme **mocnina**, 3 představuje **základ mocniny** a 4 **exponent**.
Číslo 1 000 000 se potom zapíše pomocí mocniny následovně

$$1\,000\,000 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{6\text{krát}} = 10^6$$

Můžeme si navíc všimnout, že jeden milion má ve svém zápisu šest nul a hledanou mocninou čísla deset je právě číslo šest.
Nyní je jasné, jaký je význam například zápisu $6{,}96 \cdot 10^8$ m: číslo 10^8 má ve svém zápisu za jedničkou celkem 8 nul (= sto milionů) a tímto číslem máme vynásobit desetinné číslo 6,96. Takové násobení je velmi jednoduché, stačí posunout desetinnou čárku o 8 míst směrem *doprava*:

$$6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 696\,000\,000\,\mathrm{m}$$

Studijní materiály k Astronomické olympiádě

Jak máme rozumět záporným exponentům? Kladný exponent znamenal posouvání desetinné čárky *doprava*, záporný exponent bude znamenat posouvání desetinné čárky *doleva*:

$$6{,}67 \cdot 10^{-11} = 0{,}000\,000\,000\,066\,7$$

Ihned se nabízí otázka, jaký je význam exponentu nula. Ten nepředstavuje žádné posouvání desetinné čárky, a proto jej ve vědeckém formátu čísla nepoužíváme a píšeme pouze

$$9{,}89 \cdot 10^{0} = 9{,}89.$$

Výpočty s čísly ve vědeckém formátu

Rovnou uveďme příklad *násobení* 400 a 30 000:

$$\left(4 \cdot 10^{2}\right) \cdot \left(3 \cdot 10^{4}\right) = (4 \cdot 3) \cdot \left(10^{2} \cdot 10^{4}\right) = 12 \cdot 10^{2+4} = 12 \cdot 10^{6} = 1{,}2 \cdot 10^{7}$$

Při násobení čísel ve vědeckém formátu zvlášť vynásobíme čísla, která nejsou mocninami, a mocniny se základem deset. Jak se takové mocniny násobí? Přesně tak, jak to známe – sčítáme pouze počet nul, neboli sčítáme exponenty. Výsledek takového násobení často není ve vědeckém formátu, protože před mocninou může být číslo větší nebo rovno 10. Je proto nutné posunout desetinnou čárku doleva a zvýšit exponent.
Dělení čísel 30 000 a 400:

$$\frac{3 \cdot 10^{4}}{4 \cdot 10^{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10^{4}}{10^{2}} = 0{,}75 \cdot 10^{4-2} = 0{,}75 \cdot 10^{2} = 7{,}5 \cdot 10^{1}$$

Při dělení čísel ve vědeckém formátu zvlášť vydělíme čísla, která nejsou mocninami, a mocniny se základem deset. Jak se takové mocniny dělí? Opět tak, jak to známe – odčítáme pouze počet nul, neboli odčítáme exponenty. Výsledek takového dělení často není ve vědeckém formátu, protože před mocninou může být číslo menší než 1. Je proto nutné posunout desetinnou čárku doprava a snížit exponent. Přidejme ještě jeden příklad:

$$\frac{4 \cdot 10^{2}}{3 \cdot 10^{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{10^{2}}{10^{4}} \approx 1{,}33 \cdot 10^{2-4} = 1{,}33 \cdot 10^{-2}$$

Ani takový výsledek by nás neměl překvapit, neboť při dělení menšího čísla větším číslem je výsledek menší než 1 a takové číslo se ve vědeckém formátu zapíše pomocí mocniny se záporným exponentem. Při dělení jsme navíc vhodně zaokrouhlili.
Sčítání a odčítání ve vědeckém formátu je o něco obtížnější než násobení a dělení, mezikrokem je převést si čísla tak, aby měla stejné exponenty:

$$\left(4 \cdot 10^{2}\right) + \left(3 \cdot 10^{4}\right) = \left(4 \cdot 10^{2}\right) + \left(300 \cdot 10^{2}\right) = (4 + 300) \cdot 10^{2} = 304 \cdot 10^{2} = 3{,}04 \cdot 10^{4}$$

Z příkladu vidíme, že jsme převáděli číslo s vyšším exponentem (4) na nižší exponent (2).

Řešené příklady

1. $$\frac{3{,}09 \cdot 10^{16}}{1{,}50 \cdot 10^{11}} = \frac{3{,}09}{1{,}50} \cdot \frac{10^{16}}{10^{11}} = 2{,}06 \cdot 10^{16-11} = 2{,}06 \cdot 10^{5}$$

2. $$\left(3{,}5 \cdot 10^{8}\right) \cdot \left(1{,}2 \cdot 10^{-5}\right) = (3{,}5 \cdot 1{,}2) \cdot \left(10^{8} \cdot 10^{-5}\right) = 4{,}2 \cdot 10^{8-5} = 4{,}2 \cdot 10^{3}$$

3. $$\left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right) - \left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right) = \left(1\,496 \cdot 10^{8}\right) - \left(3{,}844 \cdot 10^{8}\right) =$$

$$= (1\,496 - 3{,}844) \cdot 10^{8} = 1\,492{,}156 \cdot 10^{8} \approx 1{,}492 \cdot 10^{11}$$

A na závěr ještě jeden těžký výpočet:

4. $$\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}50 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}} = \frac{6{,}67 \cdot 5{,}97 \cdot 1{,}99}{1{,}50 \cdot 1{,}50} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{30}}{10^{11} \cdot 10^{11}} \approx$$

$$\approx 35{,}22 \cdot 10^{-11+24+30-11-11} = 35{,}22 \cdot 10^{21} = 3{,}522 \cdot 10^{22} \approx 3{,}52 \cdot 10^{22}$$

Funkce

Jestliže se hodnota nějaké veličiny (nazveme ji y) mění podle toho, jak se mění jiná veličina (označme x), říkáme, že $\boldsymbol{y}$ **je funkcí** $\boldsymbol{x}$ a zapisujeme $\boldsymbol{y = f(x)}$ nebo zkráceně $\boldsymbol{y(x)}$. Ve fyzice jsme s funkcemi do styku jistě už přišli. Například když jsme sledovali, jak se poloha tělesa, kterou jsme označili r, měnila v čase t, tedy $r(t)$.

Mocninné funkce

Funkce, které jistě známe, jsou lineární

$$y = ax + b$$

nebo kvadratická

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

V obou příkladech se jedná o případy, kdy umocňujeme proměnnou x na nějakou kladnou mocninu. Jedná se o tzv. **mnohočleny** (nebo také **polynomy**). Konkrétně kvadratická funkce je polynom druhého řádu, protože nejvyšší mocnina zde obsažená je 2. Lineární funkce je polynom prvního řádu apod.

V žádném případě nesmíme polynomy zaměňovat za *exponenciální funkce*, se kterými se budeme zabývat dále.

Poznámka: Máme-li v exponentu záporné číslo, je to to samé, jako bychom mocnili převrácenou hodnotu základu na opačný exponent. Tato věta může znít zmateně, proto ji raději ukažme v praxi na příkladu.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^{k} = \frac{1^k}{a^k} = \frac{1}{a^k}$$

Studijní materiály k Astronomické olympiádě

Exponenciální funkce

Na rozdíl od polynomů zde nemáme x jako základ, ale jako exponent! Obecně zapíšeme jako

$$y = a^x\,,$$

kde základ a je libovolné číslo, pro které platí: $a > 0$ a zároveň $a \neq 1$.
Proč nemůže být a nula? Protože by se nejednalo o funkci. Problém nastává po dosazení $x = 0$. Výraz 0^0 není definován! Sice víme, že 0 na „cokoliv" je nula, ale zároveň víme, že „cokoliv" na nultou je jedna. Dostáváme tedy v nule nejednoznačnou hodnotu, což ve funkci nepřipouštíme pro žádný bod.
Proč nemůže být a záporné? Opět by se totiž nejednalo o funkci. K pochopení potřebujeme vědět, že odmocňování je to samé jako mocnit na převrácenou hodnotu, tedy

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$$

atd. Dále pak, že sudá odmocnina nesmí mít uvnitř sebe záporné znaménko! Podívejme se na nějaký příklad, kdy je $a < 0$ a zkusme dopočítat hodnotu a^x. Zvolme libovolné záporné číslo, např. -4. Dostáváme tedy

$$(-4)^x\,.$$

S problémem se setkáme, když dojdeme s x k nějakému zlomku, který má ve jmenovateli sudé číslo. Ukažme si to pro pár příkladů:

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}: &\quad (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \\ x = \frac{3}{2}: &\quad (-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-4)^3} = \sqrt{-64} \\ x = -\frac{1}{2}: &\quad (-4)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(-4)^{-1}} = \sqrt{-\tfrac{1}{4}} \end{aligned}$$

Ani jeden z výsledných výrazů není definovaný. A nejsou to jen tyto příklady, je jich nekonečně mnoho. Pro jakékoliv záporné číslo tedy dostáváme funkci, která není definovaná v nekonečně mnoha bodech, tedy ještě o trochu horší situace než s nulou.
Mocninné funkce upravujeme následujícími způsoby:

$$a^{kx} = (a^x)^k = (a^k)^x \tag{1}$$

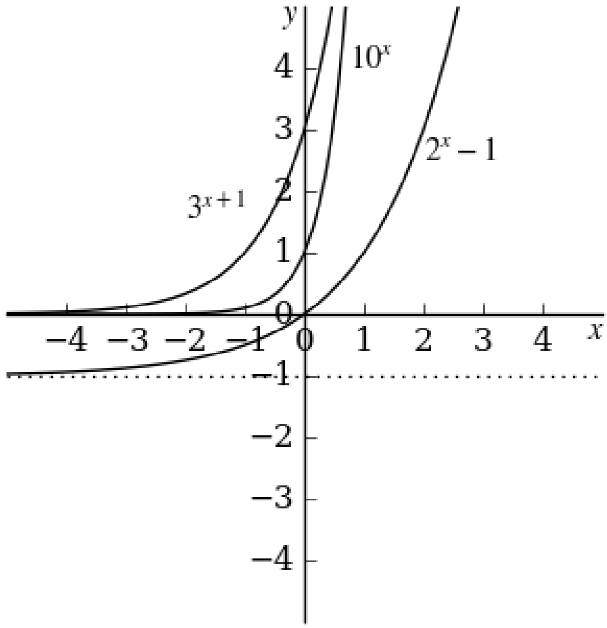
$$a^{x+c} = a^x \cdot a^c\,, \tag{2}$$

kde a je základ, tj. $a > 0$ a zároveň $a \neq 1$, a k i c jsou libovolné konstanty. Druhou úpravu nelze použít, pokud jsou základy odlišné, tj. výraz

$$a^x \cdot b^c$$

upravit nelze! Ani v případě součtu nebo rozdílu dvou exponenciálních funkcí, tj. např.

$$a^x + a^c \qquad \text{nebo} \qquad a^x - a^c\,.$$



Obrázek 1: Průběh tří exponenciálních funkcí, přičemž jedna z nich je posunutá o konstantu a jedna má o konstantu posunutý exponent.

Pokud máme dvě exponenciální funkce, které se sobě rovnají a jejich základy jsou stejné, pak se sobě musejí rovnat i jejich exponenty. Tedy

$$a^x = a^c \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad x = c\,. \tag{3}$$

Jedná se o důsledek logaritmů, k čemuž se dostaneme v následující kapitole. **Pozor!** Nelze použít v případě, že máme na jedné ze stran rovnice součet nebo rozdíl základů, konkrétně pro

$$a^x = a^c + a^k$$

v žádném případě neplatí že $x = c + k$. Zmíněnou úpravu nelze použít ani tehdy, pokud jsou základy na obou stranách rovnice jiné!
To, jak exponenciální funkce vypadá, můžeme vidět na grafu na obrázku 1. První, čeho si musíme všimnout, je, že exponenciála je vždy kladná. Samozřejmě pokud od ní neodečteme nějakou konstantu, o kterou jí posuneme na grafu dolů, jako v případě $2^x - \mathbf{1}$. Poté ale, co ji posuneme, stejně nikdy neprojde pod toto číslo (hodnota -1 je vyznačena tečkami).

Příklad

Čemu se rovná x v rovnici $\frac{1}{5^{2x-4}} = 125$?

Abychom se zbavili exponenciálního tvaru, potřebujeme upravit výraz tak, aby byl na obou stranách stejný základ. Nejprve pravou stranu

$$\frac{1}{5^{2x-4}} = 5^3$$

Vidíme, že ze zlomku na levé straně lze udělat 5 na „něco“ (vzpomeneme si přitom na vlastnost záporného exponentu)

$$5^{-(2x-4)} = 5^3$$

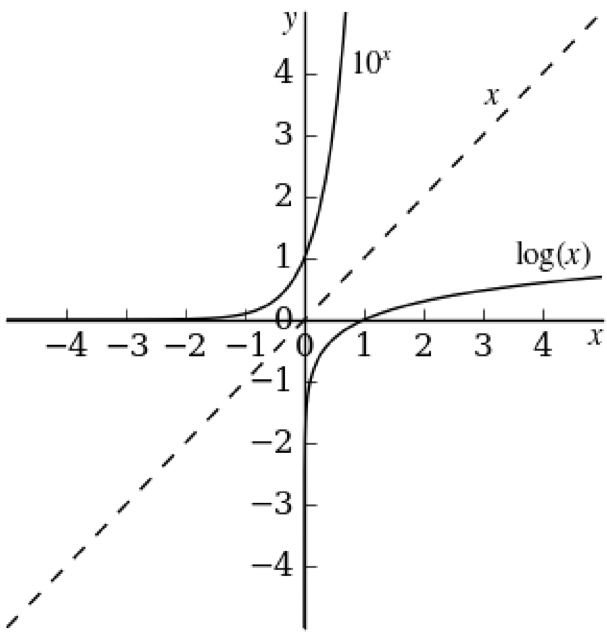
a nakonec, protože máme stejné základy, platí

$$-(2x-4) = 3$$
$$-2x + 4 = 3$$
$$-2x = 3 - 4$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Ještě můžeme udělat zkoušku a máme hotovo.

Logaritmy

Jestliže jsme pochopili, jak fungují mocniny, osvojit si logaritmy už bude snadné. Logaritmus je totiž **inverzní funkce k exponenciální funkci**. Co to znamená? Podívejte se na graf na obrázku 2, na kterém je znázorněn průběh tří funkcí: 10^x, $\log x$ (tj. logaritmus se základem 10) a x. Všimněte si, že logaritmus se doslova zrcadlí přes přímku $y = x$ do funkce 10^x. Této vlastnosti se říká inverze. Mocninná funkce zde má základ 10 stejně jako logaritmus.



Obrázek 2: Průběh funkcí 10^x, $\log x$ a x.

Obecně lze funkci logaritmus definovat s libovolným základem a, pro který však musí platit, že $a > 0$ a zároveň $a \neq 1$, což souhrnně zapíšeme jako $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$, čteme „$a$ náleží do intervalu od nuly do nekonečna bez jedné“. Jedná se tudíž o stejnou podmínku jako u exponenciální funkce. Pak píšeme

$$\log_a x\,.$$

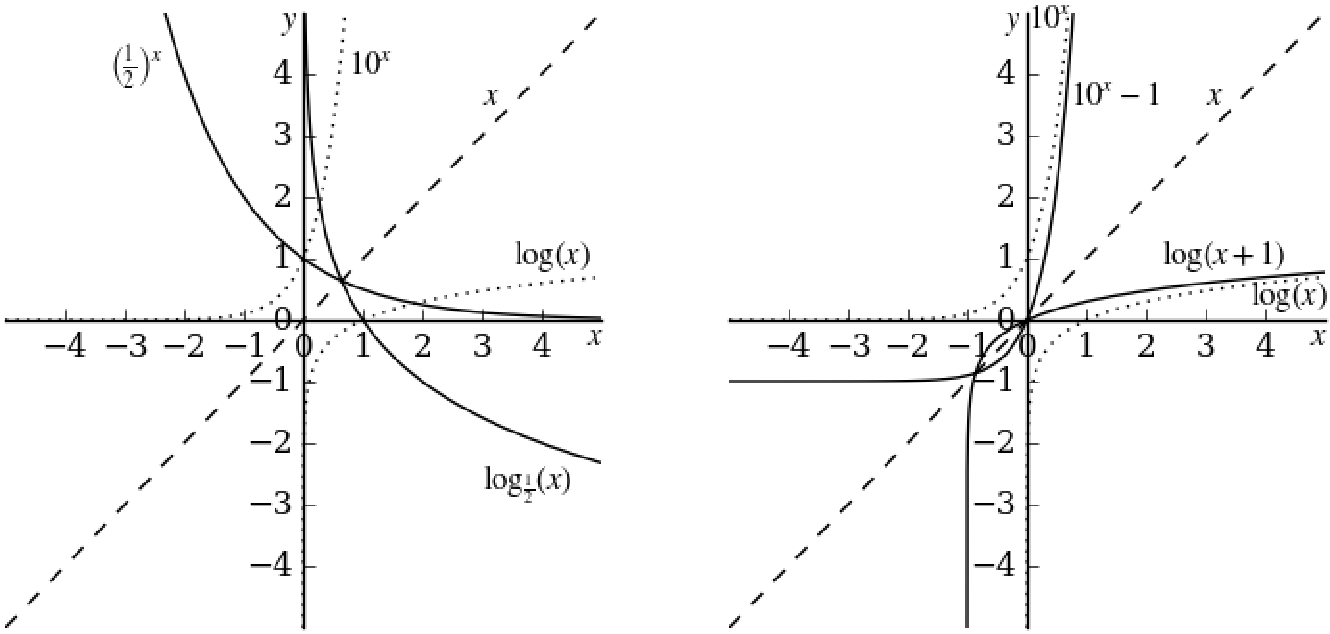
Existují dvě dodatečná pravidla zápisu:

- číslo a nepíšeme, je-li základ 10, tzv. *dekadický logaritmus* (tedy jako v grafu na obrázku 2),
- je-li základem Eulerovo číslo $e = 2.71828\ldots$, píšeme namísto $\log_e x$ pouze $\ln x$ (tomuto logaritmu se říká přirozený, latinsky *logaritmus naturalis*, z čehož je odvozena jeho zkratka).

Všimněte si v grafu 2, že stejně jako exponenciální funkce neklesá pod osu x ani logaritmus nepřechází nalevo od osy y. Znamená to, že definiční obor logaritmu, tedy interval čísel, která smíme dosadit dovnitř logaritmu (v tomto případě za x), jde od nuly (bez ní) do nekonečna, píšeme

$$\mathcal{D}_{\log x}: \; x \in (0; +\infty)\,.$$

Když se argument (zde x) blíží k hodnotě 0, blíží se logaritmus na ose y k nekonečnu a nikdy osu y neprotne. Říkáme, že se k ose y blíží asymptoticky.
Na to, jaký má funkce $\log_a x$ charakter má vliv jednak hodnota argumentu, tedy co je na místě x, i hodnota základu a, viz grafy v obrázku 3. Pokud je $a \in (0; 1)$, např. $\frac{1}{2}$, bude logaritmus funkcí klesající. Pokud je $a \in (1; +\infty)$, např. 10, bude logaritmus rostoucí. Doposud vše platilo jako u exponenciálních funkcí, ale je zde jedna odlišnost — základ není nikdy roven 1. Proč? Protože výsledkem by nebyla funkce. Důkaz snadno nahlédneme, když si dosadíme do funkce a^x hodnotu $a = 1$ a pak ji budeme zrcadlit podle přímky $y = x$ — toto přenecháme čtenáři.



Obrázek 3: Vlevo: Průběh logaritmu vzhledem k hodnotě základu a. **Vpravo:** Průběh logaritmu vzhledem k výrazu v argumentu. (V analogii s exponenciálními funkcemi.)

Pro práci s logaritmy ve výpočtech si uvedeme 3 potřebné vztahy (vždy, tj. na obou stranách rovnice, musíme dodržovat předepsané podmínky pro argument i základ výše!)

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \tag{4}$$

$$\log_a u^c = c \cdot \log_a u \tag{5}$$

$$\log_a u = \frac{\log u}{\log a}\,. \tag{6}$$

Poslední vztah plyne z definice, že logaritmus je inverzní funkce k exponenciální funkci, a lze zapsat

$$\text{buď} \qquad a^{\log_a u} = u \qquad \text{nebo} \qquad \log_a a^u = u\,. \tag{7}$$

Zcela zřejmě odtud plyne, že $\log_a 1 = 0$ pro libovolné a, pro které lze logaritmus zapsat (viz podmínky), neboť $a^0 = 1$. Znamená to, že křivka $y = \log_a x$ bude na ose x **vždy protínat jedničku**. Také odtud plyne triviální identita, že $\log_a a = 1$. To, co nám totiž z logaritmu má vyjít, lze chápat jako otázku: **„Na co musíme umocnit základ, aby nám vyšlo to, co je uvnitř logaritmu?“** Dále dostaneme zkombinováním rovnic (4) a (5) např.

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a\left(u \cdot v^{-1}\right) = \log_a u + \log_a v^{-1} = \log_a u - \log_a v\,.$$

Mějte se ovšem na pozoru — je-li uvnitř logaritmu součet nebo rozdíl, tj. $\log(u \pm v)$, **nelze** ho rozdělit do více logaritmů!
V astrofyzice se nejčastěji setkáme s dekadickým logaritmem. Vyskytuje se např. v Pogsonově rovnici

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{L_1}{L_2}\,, \tag{8}$$

která říká, jaký je rozdíl pozorovaných hvězdných velikostí dvou světelných zdrojů (levá strana rovnice), pokud mají zářivé výkony L_1 a L_2 . Jednotky hvězdné velikosti definované touto rovnicí jsou magnitudy, označujeme mag. Nezapomeňme, že čím je **vyšší** číslo v magnitudách, tím **slabší** zdroj máme. Tak, jak je Pogsonova rovnice zapsaná, nemá žádnou absolutní škálu — s tím ale nelze nic dělat. Nulovou magnitudu astronomové zadefinovali uměle a při měření hvězdných velikostí dalších zdrojů vždy potřebujeme nějakou hvězdu nebo planetku ke srovnání.
Vnímavý čtenář jistě postřehl, že pozorovaný zářivý výkon záleží na apertuře přístroje, který k pozorování použijeme. Přesněji na převrácené hodnotě plochy, kterou do něj světlo vstupuje. Pogsonovu rovnici lze proto velmi dobře použít i k určení mezní hvězdné velikosti daného přístroje. Samozřejmě za předpokladu, že máme nějakou srovnávací hodnotu — např. tu plynoucí z historické definice Pogsonovy rovnice, že lidské oko je schopné při naprosté tmě vidět nejvýše hvězdy s 6 mag. K výpočtu použijeme vztah

$$m_\mathrm{A} - m_\mathrm{B} = 2{,}5 \log \frac{d_\mathrm{A}^2}{d_\mathrm{B}^2}\,, \tag{9}$$

kde m_A a d_A označují mezní hvězdnou velikost pozorovanou přístrojem A a průměr jeho vstupního otvoru za předpokladu, že má kruhový průřez. Obdobně pro index B. Odvození rovnice (9) za úkol čtenáři na nejaké deštivé odpoledne. Pouze upozorníme, že zde na rozdíl od rovnice (8) po úpravách vyjde kladné znaménko na pravé straně!

Příklad 1

Ukaž výpočtem, že $y = \log(x+1)$ je inverzní k $y = 10^x - 1$, jak je vidět na obrázku 3.

> Funkce inverzní se sestrojí zrcadlením podle osy symetrie $y = x$. První fází výpočtu je tedy záměna x a y
>
> $$y = \log(x+1) \qquad \rightarrow \qquad x = \log(y+1)$$
>
> a ve druhé fázi vyjádříme z nové rovnice proměnnou y jako funkci proměnné x, např. použitím vztahu (7).
>
> $$10^x = y + 1$$
>
> Odtud $y = 10^x - 1$.

Příklad 2

Jaký je poměr zářivých výkonů složek dvojhvězdy, jestliže jsou jejich hvězdné velikosti 1 mag a 4 mag?

Vzhledem k tomu, že se jedná o dvojhvězdu, můžeme předpokládat, že jsou obě složky stejně daleko, což je pro řešení důležité. Poměr zářivých výkonů budeme vyjadřovat vzhledem k primáru, tj. jasnější složce (1 mag) — tu ozdačíme indexem 1. Zářivý výkon sekundáru (4 mag) bude zlomek zářivého výkonu primáru, tedy

$$kL_2 = L_1\,.$$

Použijeme Pogsonovu rovnici

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{L_1}{L_2}\,,$$

do které dosadíme

$$1 - 4 = -2{,}5 \log \frac{kL_2}{L_2}\,.$$

Zlomek v argumentu logaritmu zkrátíme, celou rovnici vydělíme $-2{,}5$

$$\frac{3}{2{,}5} = \log k\,.$$

Nakonec rovnici upravíme a odlogaritmujeme podle vztahu (7)

$$k = 10^{1{,}2} \approx 15{,}8\,,$$

tedy primár má téměř 16krát větší zářivý výkon než sekundár.

Příklad 3

Jaká je mezní hvězdná velikost dalekohledu s průměrem zrcadla 60 cm?

K výpočtu použijeme Pogsonovu rovnici (9), kterou jsme upravili pro výpočet mezní hvězdné velikosti. K porovnání použijeme lidské oko, o kterém víme, že má maximální průměr pupily asi 6 mm = 0,6 cm a je schopno vidět objekty do 6 mag (to je tedy jeho mezní hvězdná velikost). Dalekohled označíme indexem „d“ a oko „o“.

$$m_\mathrm{o} - m_\mathrm{d} = 2{,}5 \log \frac{d_\mathrm{o}^2}{d_\mathrm{d}^2}$$

Dosadíme a dbáme na to, aby byly ve zlomku uvnitř logaritmu stejné jednotky!

$$6\,\mathrm{mag} - m_\mathrm{d} = 2{,}5 \log \frac{0{,}36\,\mathrm{cm}^2}{3\,600\,\mathrm{cm}^2}$$

Zlomek uvnitř logaritmu zkrátíme a z rovnice vyjádříme mezní hvězdnou velikost dalekohledu. Výsledek vyjde v magnitudách.

$$m_\mathrm{d} = \left(6 - 2{,}5 \log \frac{1}{10\,000}\right)\,\mathrm{mag}$$

Protože $\frac{1}{10\,000} = 10^{-4}$, upravíme logaritmus podle vztahu (5)

$$m_\mathrm{d} = (6 + 10 \log 10)\,\mathrm{mag} = 16\,\mathrm{mag}\,.$$

V poslední úpravě jsme použili triviální identitu, že logaritmus o základu a z čísla a je roven jedné, tedy speciálně $\log 10 = 1$.